



第一章

集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念



基础上分

1. C 【解析】A 选项,“个子高”是不明确的说法,故某学校个子高的学生不能构成集合,A 错误;

B 选项,“受欢迎”是不明确的说法,故巴黎奥运会上受欢迎的运动员不能构成集合,B 错误;

C 选项,2024 年参加“两会”的代表是明确的,则 2024 年参加“两会”的代表能构成集合,C 正确;

D 选项,精确度未确定的情况下,“ π 的近似值”是不明确的说法,故其不能构成集合,D 错误.

故选 C.

2. C 【解析】因为 a, b, c, d 为集合 M 的四个元素,所以这四个元素均不相等,而等腰梯形的两腰相等,菱形的四条边都相等,矩形的两组对边分别相等,故该四边形不可能是等腰梯形、菱形、矩形,即 A, B, D 错误, C 正确. 故选 C.

3. C 【解析】对于 A,0 是数字不是集合, $\{0\}$ 表示以 0 为元素的一个集合,故 A 错误;

对于 B, $\{x | (x-2)^2(x-3) = 0\} = \{2, 3\}$, 故 B 错误;

对于 C, 根据集合中元素的无序性, 可得由 3, 4, 5 组成的集合可表示为 $\{3, 4, 5\}$ 或 $\{4, 5, 3\}$, 故 C 正确;

对于 D, 由集合中元素的确定性可知“很小的实数”是不明确的, 可得很小的实数不能构成集合, 故 D 错误.

故选 C.

4. D 【解析】对于 A, 由 π 是无理数, 得 π^2 也是无理数, 则 $\pi^2 \notin \mathbf{Q}$, A 错误;

对于 B, 自然数集 \mathbf{N} 包含元素 0, 即 $0 \in \mathbf{N}$, B 错误;

对于 C, \mathbf{Z} 表示整数集, 即 $-4 \in \mathbf{Z}$, C 错误;

对于 D, $-2\ 024$ 是实数, 即 $-2\ 024 \in \mathbf{R}$, D 正确.

故选 D.

5. B 【解析】对于 A, 由 $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=-1 \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases}$ 不满足 $y=2x$, 故 $(3, -1) \notin M$, 故

A 错误;

对于 B, 由 $\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 满足 $y=$



$2x$, 故 $(-1, 3) \in M$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{3}{2}, \end{cases}$ 不满足

$y=2x$, 故 $(-1, 2) \notin M$, 故 C 错误;

对于 D, 由 $\begin{cases} x-y=2, \\ x+y=-1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{3}{2}, \end{cases}$ 不满足

$y=2x$, 故 $(2, -1) \notin M$, 故 D 错误.

故选 B.

6. B 【解析】由题意可知, 集合 A 的元素是所有的偶数, 集合 B 的元素是所有的奇数,

因为“奇数+偶数=奇数”, 所以 $(a+b) \notin A, (a+b) \in B$.

易知集合 C 表示的是部分奇数, 当 $a=4, b=1$ 时, $a+b=5 \in C$, 当 $a=2, b=1$ 时, $a+b=3 \notin C$, 所以 A, C, D 错误, B 正确.

故选 B.

7. C 【解析】联立 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2-y=2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2, \end{cases}$

所以方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2-y=2 \end{cases}$ 的解集是 $\{(1, -1), (-2, 2)\}$.

故选 C.

易错警示 忽略点集与数集的区别致错

在根据条件表示集合的过程中, 要注意集合中元素的意义, 通常来讲, 数集是由数构成的集合, 元素以数字的形式罗列出来; 点集是由点构成的集合, 元素是以坐标形式表示出来的点.

8. ABD 【解析】对于 A, $M = \{3, -1\}$ 是数集, $P = \{(3, -1)\}$ 是点集, 二者不是同一集合, 故 A 符合题意;

对于 B, $(3, 1)$ 与 $(1, 3)$ 表示不同的点, 故 B 符合题意;

对于 C, $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\} = \{x | x \geq 1\}$, $P = \{x | x = t^2 + 1, t \in \mathbf{R}\} = \{x | x \geq 1\}$, 故 C 不符合题意;

对于 D, M 是二次函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 的函数值组成的集合, 而集合 P 是二次函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 图象上的所有点组成的集合, 故 D 符合题意.

故选 ABD.

9. 【解】(1) 用描述法表示为 $\{x \in \mathbf{Q} | 2 < x < 5\}$.

(2) 用列举法表示为 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.



24}.

(3) 解方程组得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, 所以用列举法表示为 $\{(0,0), (1,1)\}$.

(4) 用描述法表示为 $\{x|x \text{ 是正六边形}\}$.

方法总结

(1) 用列举法表示集合时, 要先弄清集合中的元素是什么, 是数是点还是其他元素. 当元素是数时, 元素与元素之间要用“,” 隔开; 当集合中的元素是点时, 应将有序实数对用小括号括起来表示一个元素.

(2) 用描述法表示集合时应注意四点: ①写清楚该集合中元素的代号; ②说明该集合中元素的性质; ③所有描述的内容都可写在集合符号内; ④在描述法的一般形式 $\{x \in I | p(x)\}$ 中, “ x ” 是集合中元素的代表形式, “ I ” 是 x 的范围, “ $p(x)$ ” 是集合中元素 x 的共同特征, 竖线不可省略.



对点上分

1. A 【解析】由 $1 \notin A$ 且 $3 \in A$, 得

$$\begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ 6m-3 > 0 \end{cases}, \text{解得 } \frac{1}{2} < m \leq \frac{3}{2}, \text{故选 A.}$$

2. A 【解析】因为 $-3 \in A$, 所以 $a-2=-3$ 或 $a^2+4a=-3$.

当 $a-2=-3$, 即 $a=-1$ 时, $A=\{-3, -3, 10\}$, 不符合集合中元素的互异性, 故 $a=-1$ 不符合题意;

当 $a^2+4a=-3$, 即 $a=-1$ (舍) 或 $a=-3$ 时, $A=\{-5, -3, 10\}$, 符合题意. 故 a 的值为 -3 .

故选 A.

易错警示

忽略对集合中元素的互异性的检验

本题是含参数的集合问题, 根据题意求出参数的值后要注意检验参数的值是否满足集合中元素的互异性. 本题的易错之处是忽视检验 $a=-1$ 时是否满足集合中元素的互异性.

3. D 【解析】 $A=\{2, 0, 1, 9\}$, $B=\{k|k \in \mathbf{R}, k^2-2 \in A, k-2 \notin A\}$.

①若 $k^2-2=2$, 则 $k=\pm 2$,

当 $k=2$ 时, $k-2=0 \in A$, 所以 $k \neq 2$,

当 $k=-2$ 时, $k-2=-4 \notin A$, 满足条件;

②若 $k^2-2=0$, 则 $k=\pm\sqrt{2}$, $k-2=\pm\sqrt{2}-2 \notin A$, 满足条件;

③若 $k^2-2=1$, 则 $k=\pm\sqrt{3}$, $k-2=\pm\sqrt{3}-2 \notin A$, 满足条件;

④若 $k^2-2=9$, 则 $k=\pm\sqrt{11}$, $k-2=\pm\sqrt{11}-$



$2 \notin A$, 满足条件.

综上, $B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{11}, -\sqrt{11}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\}$, 所以集合 B 中所有元素之和为 -2 .

故选 D.

4.3 【解析】 当 x, y, z 都为正数时, $\frac{x}{|x|} +$

$$\frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} + \frac{z}{z} + \frac{xyz}{xyz} = 4;$$

当 x, y, z 中有两个正数时, 不妨设 $x > 0, y >$

$$0, z < 0, \text{ 则 } \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} -$$

$$\frac{z}{z} - \frac{xyz}{xyz} = 0;$$

当 x, y, z 中只有一个正数时, 不妨设 $x > 0,$

$$y < 0, z < 0, \text{ 则 } \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz} = \frac{x}{x} -$$

$$\frac{y}{y} - \frac{z}{z} + \frac{xyz}{xyz} = 0;$$

$$\text{当 } x, y, z \text{ 都为负数时, } \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} +$$

$$\frac{|xyz|}{xyz} = -\frac{x}{x} - \frac{y}{y} - \frac{z}{z} - \frac{xyz}{xyz} = -4.$$

综上, $M = \{-4, 0, 4\}$,

所以 M 中元素的个数为 3.

5. 【解】 (1) 由于 $2 \in A$, 则当 $a = 2$ 时, $\frac{1}{1-a} =$

$$\frac{1}{1-2} = -1 \in A,$$

$$\text{当 } a = -1 \text{ 时, } \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A,$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A.$$

所以 A 中至少还有两个元素, 分别为

$$-1, \frac{1}{2}.$$

(2) 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 且 A 中只有一个

元素, 所以 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0, \Delta = -3 <$

0 , 该方程在实数范围内无解, 所以集合 A 中不可能只含有一个元素.

6. B 【解析】 当 $a = 0$ 时, 方程为 $2x + b = 0$, 此时一定有解,

此时 $b = -1, 0, 1, 2$, 即有序实数对 (a, b) 为 $(0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2)$, 共 4 个.

当 $a \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程,

$$\Delta = 4 - 4ab \geq 0, \text{ 则 } ab \leq 1.$$

当 $a = -1, 1, 2$ 时, 此时有序实数对 (a, b) 为 $(-1, 0), (-1, 2), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0)$, 共 9 个.

综上, 关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + b = 0$ 有实数解的有序数对 (a, b) 的个数为 13, 故选 B.



7.0 或 1 或 2 【解析】由 $x-m=0$ 或 $x^2-3x+2=0$, 可得 $x-m=0$ 或 $(x-2)(x-1)=0$.

当 $m \neq 2$ 且 $m \neq 1$ 时, $A = \{1, 2, m\}$,

根据题意可得 $m+1+2=3$, 解得 $m=0$;

当 $m=2$ 时, $A = \{1, 2\}$,

元素之和为 $1+2=3$, 符合题意;

当 $m=1$ 时, $A = \{1, 2\}$,

元素之和为 $1+2=3$, 符合题意.

综上所述, 实数 $m=0$ 或 1 或 2.

8.【解】(1) \because 集合 A 中有两个元素,

\therefore 关于 x 的方程 $mx^2+3x-2=0$ 有两个不等的实数根,

$\therefore \Delta = 9 - 4m \times (-2) > 0$, 且 $m \neq 0$, 即 $m > -\frac{9}{8}$, 且 $m \neq 0$.

故实数 m 的取值范围是 $\left\{ m \mid -\frac{9}{8} < m < 0 \right.$
或 $\left. m > 0 \right\}$.

(2) 当 $m=0$ 时, 方程为 $3x-2=0$, 解得 $x = \frac{2}{3}$, 此时集合 A 中只有一个元素;

 **提示:** 二次项系数含参, 优先考虑系数为 0

当 $m \neq 0$ 时, 若集合 A 中只有一个元素, 则关于 x 的方程 $mx^2+3x-2=0$ 有两个相等的实数根,

即 $\Delta = 9 - 4m \times (-2) = 0$, 解得 $m = -\frac{9}{8}$;

若 A 中没有元素, 则关于 x 的方程 $mx^2+3x-2=0$ 没有实数根,

即 $\Delta = 9 - 4m \times (-2) < 0$, $m < -\frac{9}{8}$.

综上所述, 实数 m 的取值范围是

$\left\{ m \mid m \leq -\frac{9}{8} \right\} \cup \{0\}$.

1.2 集合间的基本关系



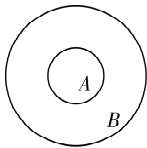
基础上分

1. BD 【解析】空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 故选项 A 错误;

子集具有传递性, 故选项 B 正确;

若一个集合是空集, 则没有真子集, 故选项 C 错误;

由 Venn 图易知选项 D 正确. 故选 BD.



2. C 【解析】对于①, $\{0\}$ 中的元素 0 属于 $\{0, 1, 2\}$, 因此 $\{0\}$ 是 $\{0, 1, 2\}$ 的子集, 故

①正确;

对于②, 集合中元素具有无序性, $\{0, 1, 2\}$



和 $\{2, 1, 0\}$ 是同一个集合, 而任何集合都是自身的子集, 故②正确;

对于③, 空集是任何集合的子集, 因此 \emptyset 是 $\{0, 1, 2\}$ 的子集, 故③正确;

对于④, 空集是不含任何元素的集合, 而 $\{0\}$ 是包含元素0的集合, 故④错误;

对于⑤, 0是元素, $\{0\}$ 是包含元素0的集合, 元素和集合不能相等, 故⑤错误.

故选 C.

易错警示 对空集概念理解不透彻而致错

对空集概念理解不透彻以及对集合的表示方法掌握不牢固, 容易导致此处出现问题. 注意: 空集本身就是集合, 空集不包含任何元素, 并且空集是任何集合的子集.

3. B 【解析】 $N = \{x | x^2 - 2x = 0\} = \{0, 2\}$, 又 $M = \{0, 1, 2\}$, 所以 $N \subsetneq M$, 故选 B.

4. B 【解析】集合 $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases} \right\} = \{(2, 2)\}$, 而集合 $C = \{(x, y) | y=x\}$, 表示直线 $y=x$ 上所有点组成的集合, 所以 $D \subseteq C$. 故选 B.

5. B 【解析】由题意得 $M = \left\{ x \mid x = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $N = \left\{ x \mid x = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$,
显然 $2k+1, k \in \mathbf{Z}$ 仅表示奇数, 而 $k+2, k \in \mathbf{Z}$ 表示整数,
因此集合 M 是集合 N 的子集, 即 $M \subseteq N$,
故选 B.

6. 【解】(1) 因为集合 $M = \{x | x < 2 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}\}$,
所以集合 $M = \{0, 1\}$, 所以集合 M 的子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$,
集合 M 的真子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}$.

(2) 因为 $N = \{x | -2 < x < 2 \text{ 且 } x \in \mathbf{Z}\}$, 所以集合 $N = \{-1, 0, 1\}$.

所以集合 N 的子集为 $\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}, \{-1, 0, 1\}$, 共 8 个;

集合 N 的非空真子集为 $\{-1\}, \{1\}, \{0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}$, 共 6 个.

7. C 【解析】 \because 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解组成的集合为 $\{-1, 1\}$, $\therefore \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$,
故①正确;

$\therefore \left\{ x \mid x = \frac{1 - (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N} \right\} = \{0, 1\}$,
 $\{x | -1 < x < 2, x \in \mathbf{N}\} = \{0, 1\}$, $\therefore \left\{ x \mid x = \frac{1 - (-1)^n}{2}, n \in \mathbf{N} \right\} = \{x | -1 < x < 2, x \in \mathbf{N}\}$, 故



②正确;

$\because \{(x, y) | y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\}$ 是点集, $\{0, 1\}$ 是数集, $\therefore \{(x, y) | y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}\} \neq \{0, 1\}$, 故③错误. 故选 C.

8. B 【解析】 $\because P = \{1, a\}, Q = \{-1, 0, a+1\}, P \subseteq Q$,

$\therefore 1 \in Q, \therefore 1 = a+1$, 解得 $a = 0$, 即 $P = \{1, 0\}, Q = \{-1, 0, 1\}$, 符合题意.

故选 B.

9. 【解】(1) 因为 $x^2 + 2x - m + 6 = 0$ 有实根, 所以 $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-m + 6) \geq 0$, 解得 $m \geq 5$, 所以 $A = \{m | m \geq 5\}$.

(2) 当 $B = \emptyset$ 时, $3a - 1 < 2a - 1$, 解得 $a < 0$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 因为 $B \subseteq A$, 所以

$$\begin{cases} 2a - 1 \leq 3a - 1, \\ 2a - 1 \geq 5, \end{cases} \text{ 解得 } a \geq 3.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a < 0 \text{ 或 } a \geq 3\}$.

易错警示 忽视对子集为空集的讨论

求解含参数的集合是确定集合的子集或真子集时, 应考虑该集合为空集的特殊情况, 因此本题求解的易错之处是忽视集合 B 为空集的特殊情况而导致漏解.



对点上分

1. B 【解析】由于 $x \in \mathbf{N}$, 则 $x = 0, 1, 2, 3, \dots$.

当 $x = 0$ 时, $\frac{6}{6-0} = 1 \in \mathbf{N}$;

当 $x = 1$ 时, $\frac{6}{6-1} = \frac{6}{5} \notin \mathbf{N}$;

当 $x = 2$ 时, $\frac{6}{6-2} = \frac{3}{2} \notin \mathbf{N}$;

当 $x = 3$ 时, $\frac{6}{6-3} = \frac{6}{3} = 2 \in \mathbf{N}$;

当 $x = 4$ 时, $\frac{6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbf{N}$;

当 $x = 5$ 时, $\frac{6}{6-5} = 6 \in \mathbf{N}$;

当 $x = 7$ 时, $\frac{6}{6-7} = -6 \notin \mathbf{N}; \dots$

故集合 $M = \{0, 3, 4, 5\}$, 所以集合 M 的子集个数为 $2^4 = 16$. 故选 B.

2. B 【解析】集合 $P = \{4, 5, 6\}, Q = \{1, 2, 3\}$, 定义 $P - Q = \{x | x = p - q, p \in P, q \in Q\}$, 则 $P - Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 元素个数为 5, 故集合 $P - Q$ 的所有真子集的个数为 $2^5 - 1 = 31$, 故选 B.

3. C 【解析】解方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 得 $x_1 = 3, x_2 = -1$, 则 $\{x | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1, 3\}$. 因为 $\{x | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{-1, 3\} \subseteq A \subsetneq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,



所以集合 A 的个数为 $2^{5-2}-1=2^3-1=7$.

故选 C.

4. **AD** 【解析】对于 A , $\{x \in \mathbf{R} | x^2 = x\} = \{0, 1\}$, 所以 $\{0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R} | x^2 = x\}$, 故 A 正确;
对于 B , 2 是质数, 但 2 不是奇数, 故 B 错误;

对于 C , $A = \{x | y = x^2 + 1\} = \mathbf{R}$, $B = \{y | y = x^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$, 故 C 错误;

对于 D , $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$, 所以 $\emptyset \subseteq \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}$, 故 D 正确.

故选 AD.

5. **A** 【解析】根据集合的概念可知集合 M 表示所有被 7 除余 5 的正数以及 -2 所构成的集合,

集合 P 表示所有被 7 除余 5 的正数所构成的集合,

所以 $P \subsetneq M$,

集合 S 表示所有被 14 除余 5 的正数所构成的集合,

任取 $a \in S$, 则 $a = 14m + 5 = 7 \cdot (2m) + 5$, $m \in \mathbf{N}$, 所以 $a \in P$, $S \subseteq P$,

又 $12 \in P$, $12 \notin S$, 所以 $S \subsetneq P$.

综上, $S \subsetneq P \subsetneq M$,

故选 A.

6. **BCD** 【解析】因为集合 A 有且仅有 2 个子集, 所以集合 A 中仅有一个元素. 当 $a = 0$ 时, 方程化为 $2x = 0$, 所以 $x = 0$, $A = \{0\}$, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, 因为集合 A 中仅有一个元素, 所以 $\Delta = 4 - 4a^2 = 0$, 所以 $a = \pm 1$, 此时 $A = \{1\}$ 或 $A = \{-1\}$, 满足题意. 故选 BCD.

7. **AC** 【解析】当 $a = 0$ 时, $B = \{1\}$, 满足条件.

当 $a \neq 0$ 时, 若 $B = \{1\}$, 则

$$\begin{cases} \Delta = 1 + 4a = 0, \\ a + 1 - 1 = 0, \end{cases} \text{无解};$$

$$\text{若 } B = \{0\}, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = 1 + 4a = 0, \\ -1 = 0, \end{cases} \text{无解};$$

$$\text{若 } B = \{0, 1\}, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = 1 + 4a > 0, \\ -1 = 0, \\ a + 1 - 1 = 0, \end{cases} \text{无解};$$

$$\text{若 } B = \emptyset, \text{ 则 } \Delta = 1 + 4a < 0, \text{ 得 } a < -\frac{1}{4}.$$

综上所述, $a = 0$ 或 $a < -\frac{1}{4}$, 故选 AC.

8. **0** 【解析】由 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$ 易知

$a \neq 0$, $a \neq 1$, 由两个集合相等的定义可知,

$$\text{若 } \begin{cases} b = 1, \\ a + b = 0, \end{cases} \text{ 则 } a = -1, \text{ 经验证, 符合题意};$$

 **提示:** 集合中的元素具有互异性, 需要检验



若 $\begin{cases} \frac{b}{a} = 1, \\ a+b=0, \end{cases}$ 由于 $a \neq 0$, 故方程组无解.

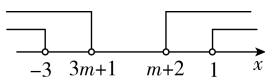
综上所述, $a = -1, b = 1$, 所以 $a^{2^{025}} + b^{2^{025}} = (-1)^{2^{025}} + 1^{2^{025}} = 0$.

9. 【解】(1) 当 $3m+1 > m+2$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, $B = \mathbf{R}$, 满足 $A \subsetneq B$;

当 $3m+1 \leq m+2$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, 要使 $A \subsetneq B$,

由图①得 $\begin{cases} 3m+1 \geq -3 \text{ ①}, \\ m+2 \leq 1 \text{ ②}, \end{cases}$

①②等号不同时成立, 解得 $-\frac{4}{3} \leq m \leq -1$.



图①

综上所述, m 的取值范围为

$$\left\{ m \mid -\frac{4}{3} \leq m \leq -1 \text{ 或 } m > \frac{1}{2} \right\}.$$

(2) $B \subsetneq A$ 即 B 是 A 的真子集.

当 $3m+1 \leq m+2$, 即 $m \leq \frac{1}{2}$ 时, $B = \emptyset$, 满足

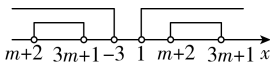
$B \subsetneq A$;

 **提示:** 要使 $B \subsetneq A$, 优先考虑 B 为空集

当 $3m+1 > m+2$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, 要使 $B \subsetneq A$, 由

图②得 $3m+1 \leq -3$ 或 $m+2 \geq 1$,

解得 $m \geq -1$, 又因为 $m > \frac{1}{2}$, 所以 $m > \frac{1}{2}$.



图②

综上所述, m 的取值范围为 \mathbf{R} .



综合上分

10. B 【解析】当 A 中元素的最小值为 1 时, 不符合题意.

当 A 中元素的最小值为 2 时, 集合 A 为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$,

集合 $B = \{1\}$, 集合对 (A, B) 的个数为 4;

当 A 中元素的最小值为 3 时, 集合 A 为 $\{3\}, \{3, 4\}$,

集合 B 为 $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$, 集合对 (A, B) 的个数为 6;

当 A 中元素的最小值为 4 时, 集合 A 为 $\{4\}$, 集合 B 为 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, 集合对 (A, B) 的个数为 7.

综上, 所有集合对 (A, B) 的个数为 $4+6+7=17$. 故选 B.



1.3 集合的基本运算



基础上分

1. **D** 【解析】 $A = \{x \in \mathbf{Z} | -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\} = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, 故 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$. 故选 D.
2. **B** 【解析】 $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\} = \{x | x \geq 3\}$, 所以 $A \cup B = \{x | x \geq 2\}$. 故选 B.
3. **C** 【解析】依题意, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 而 $A = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$. 故选 C.
4. **B** 【解析】 $\because A = \{x \in \mathbf{N}^* | 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{y | y \leq 1 \text{ 或 } y \geq 8\}$, $\therefore A \cap B = \{1, 8, 9, 10\}$. 故选 B.
5. **C** 【解析】全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $\complement_U B = \{-2, 2\}$. 故选 C.
6. **D** 【解析】因为 $U = \{x | x + 1 > 0\} = \{x | x > -1\}$, 集合 $A = \{x | 1 < x \leq 2\}$, 所以 $\complement_U A = \{x | -1 < x \leq 1 \text{ 或 } x > 2\}$. 故选 D.
7. **A** 【解析】因为 $B = \{x | (x + 1)(x - 2) \geq 0\} = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | -1 < x < 2\}$, 又因为 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, 所以 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | -1 < x < 3\}$, 故选 A.
8. **B** 【解析】由题意得, 集合 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 且 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 $\complement_U (A \cup B) = \{0, 6\}$. 故选 B.
9. **D** 【解析】当 $a = 0$ 时, $A = \emptyset$, 此时 $A \cup B = B$, 符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, 集合 $A = \{x | ax - 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{a}\right\}$.

$\because B = \{x \in \mathbf{N}^* | 2 \leq x < 5\} = \{2, 3, 4\}$, 且 $A \cup B = B$, $\therefore a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{4}$.

则实数 a 的所有值构成的集合是 $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$, 故选 D.

易错警示 含参数的集合运算中忽视对空集的讨论

本题中集合 A 含有参数, 要注意对集合 A 是否为空集进行讨论, 此处容易忽略集合 A 为空集的情形, 导致遗漏参数的值.

10. 【解】(1) $\because A \cap B = B$, $\therefore B \subseteq A$.

当 $m - 1 > 2m + 1$, 即 $m < -2$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A$;

当 $m - 1 \leq 2m + 1$, 即 $m \geq -2$ 时, 要使 $B \subseteq A$

成立, 需 $\begin{cases} m - 1 \geq -2, \\ 2m + 1 \leq 5, \end{cases}$ 可得 $-1 \leq m \leq 2$.



综上, $m < -2$ 或 $-1 \leq m \leq 2$ 时, 有 $A \cap B = B$, 即实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m < -2 \text{ 或 } -1 \leq m \leq 2\}$.

(2) $\because x \in \mathbf{R}$, 且 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid m-1 \leq x \leq 2m+1\}$,

且没有元素 x 使 $x \in A$ 与 $x \in B$ 同时成立, $\therefore A$ 与 B 的交集为空集.

\therefore ①若 $B = \emptyset$, 则 $m-1 > 2m+1$, 即 $m < -2$ 时, 满足条件;

②若 $B \neq \emptyset$, 则要满足的条件是

$$\begin{cases} m-1 \leq 2m+1, \\ m-1 > 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-1 \leq 2m+1, \\ 2m+1 < -2, \end{cases}$$

解得 $m > 6$ 或 $-2 \leq m < -\frac{3}{2}$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $\left\{m \mid m < -\frac{3}{2} \text{ 或 } m > 6\right\}$.



对点上分

1. C 【解析】由题图可知阴影部分所表示的集合为 $\complement_{(A \cup B)} B, A \cap (\complement_U B)$, 故②③正确;

因为 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 3\} = \{-1, 0, 1, 2\}$,

$\complement_U B = \{-1, 2, 4\}$,

所以 $A \cap (\complement_U B) = \{-1, 2\}$, 故①正确;

$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B) = \{4\}$, 故④错误.

所以正确的有 3 个. 故选 C.

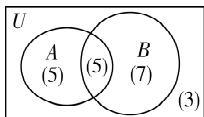
2. 【解】(1) $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 \leq x < 3\} = \{0, 1, 2\}$,
 $N = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$, 所以 $M \cap N = \{2\}$.

(2) 因为 $M \cup N = \{-1, 0, 1, 2\}$, 所以 $\complement_U (M \cup N) = \{-4, 4\}$.

(3) 因为 $U = \{-4, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $M \cap N = \{2\}$, 所以 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = \complement_U (M \cap N) = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.

一题多解 因为 $\complement_U M = \{-4, -1, 4\}$,
 $\complement_U N = \{-4, 0, 1, 4\}$, 所以 $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.

3. C 【解析】设擅长语文的同学构成集合 A , 擅长英语的同学构成集合 B , 20 人代表队构成全集 U ,



则 $\text{card}(A) = 10$, $\text{card}(B) = 12$, $\text{card}(A \cap B) = 5$, $\text{card}(U) = 20$,

$\therefore \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 10 + 12 - 5 = 17$,

$\therefore \text{card}(\complement_U (A \cup B)) = 20 - 17 = 3$,

\therefore 语文和英语均不擅长的同学有 $20 - 17 =$



3(名).

故选 C.

4. C 【解析】设参加心理社的同学构成集合 A , 参加地理社的同学构成集合 B , 参加动漫社的同学构成集合 C ,

由题知 $\text{card}(A \cup B \cup C) = 35$, $\text{card}(A \cap B \cap C) = 0$, $\text{card}(A) = 19$, $\text{card}(B) = 16$, $\text{card}(C) = 15$,

则 $\text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) = 19 + 16 + 15 = 50$,

又 $\text{card}(A \cap B) = 6$, $\text{card}(B \cap C) = 5$,

所以 $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$,

即 $35 = 50 - 6 - 5 - \text{card}(A \cap C)$, 得 $\text{card}(A \cap C) = 4$, 所以只参加了一个社团的同学共有 $19 - (4 + 6) + 16 - (6 + 5) + 15 - (4 + 5) = 20$ (人).

故选 C.

5. D 【解析】因为 $A = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x | x \leq a - 1 \text{ 或 } x \geq a + 1\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | a - 1 < x < a + 1\}$,

当 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \emptyset$ 时, 有 $\begin{cases} a - 1 \geq 0, \\ a + 1 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $1 \leq$

$a \leq 2$,

所以当 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) \neq \emptyset$ 时, 有 $a < 1$ 或 $a > 2$, 所以实数 a 的取值范围是 $\{a | a < 1 \text{ 或 } a > 2\}$. 故选 D.

6. $\{a | -4 < a < 1\}$



思路导引 先求得 $A \cap B = \emptyset$ 时, 实数 a 的取值范围, 再取补集即可.

【解析】由题得, $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | 2a < x < a + 3\}$.

若 $B = \emptyset$, 则 $2a \geq a + 3$, 即 $a \geq 3$, 此时满足 $A \cap B = \emptyset$;

若 $B \neq \emptyset$, 则 $2a < a + 3$, 即 $a < 3$, 此时若要使得 $A \cap B = \emptyset$,

则还需 $2a \geq 2$ 或 $a + 3 \leq -1$, 解得 $a \geq 1$ 或 $a \leq -4$,

此时满足题意的 a 的取值范围为 $a \leq -4$ 或 $1 \leq a < 3$.

综上, 当 $A \cap B = \emptyset$ 时, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a \leq -4 \text{ 或 } a \geq 1\}$.

所以当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, 实数 a 的取值范围为 $\{a | -4 < a < 1\}$.

7. C 【解析】因为 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{2\}$, 所以 $2 \in A$, 所以 $4 + 2p - 6 = 0$, 解得 $p = 1$,

当 $p = 1$ 时, 由 $x^2 + x - 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -3$, 所以 $-3 \in B$,

故 $9 - 3q + 2 = 0$, 解得 $q = \frac{11}{3}$, 所以 $p + q = 1 +$



$$\frac{11}{3} = \frac{14}{3}, \text{ 故选 C.}$$

8. A 【解析】由题意可知, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 10\}$.

因为 $B \cap (\complement_{\mathbb{R}} A) = \emptyset$, 所以 $B \subseteq A$,

因为 $B = \{x | 1-m \leq x \leq 1+m\}$, 且满足 $B \subseteq A$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 10\}$,

所以当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$,

此时 $1-m > 1+m$, 解得 $m < 0$;

$$\text{当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 则有 } \begin{cases} m \geq 0, \\ 1-m \geq -2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$$

解得 $0 \leq m \leq 3$.

综上, $m \leq 3$. 故选 A.

9. 【解】(1) 由题意知, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -3 \leq x \leq 7\}$,
因为 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \complement_{\mathbb{R}} A$, 所以 $B \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$.

①当 $B = \emptyset$, 即 $m+1 > 2m-1$ 时, 满足 $B \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$, 此时 $m < 2$;

②当 $B \neq \emptyset$ 时, 若 $B \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$,

$$\text{则 } \begin{cases} m+1 \leq 2m-1, \\ m+1 \geq -3, \\ 2m-1 \leq 7, \end{cases} \text{ 解得 } 2 \leq m \leq 4.$$

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\{m | m \leq 4\}$.

(2) 因为 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | a \leq x \leq b\}$, 且 $b-a \geq 1$, 所以 $B \neq \emptyset$, 即 $m+1 \leq 2m-1$,
解得 $m \geq 2$, 则 $m+1 \geq 3$, $2m-1 \geq 3$.

①当 $2m-1 \leq 7$, 即 $m \leq 4$ 时, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$,

故 $2m-1-(m+1) \geq 1$, 解得 $3 \leq m \leq 4$;

②当 $\begin{cases} 2m-1 > 7, \\ m+1 \leq 7, \end{cases}$ 即 $4 < m \leq 6$ 时, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | m+1 \leq x \leq 7\}$,

故 $7-(m+1) \geq 1$, 解得 $4 < m \leq 5$;

③当 $m+1 > 7$, 即 $m > 6$ 时, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$, 不符合题意.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\{m | 3 \leq m \leq 5\}$.



综合上分

10. C 【解析】若 $A \cup B = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $a+2, 2a+1 \in A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, 且 $1, a+2, 2a+1$ 互不相等.

提示: 集合中元素的互异性

若 $a+2=2$, 则 $a=0$, $2a+1=1$, 不满足集合中元素的互异性;

若 $a+2=3$, 则 $a=1$, $2a+1=3$, 不满足集合中元素的互异性;

若 $a+2=4$, 则 $a=2$, $2a+1=5$, 符合题意;

若 $a+2=5$, 则 $a=3$, $2a+1=7$, 此时与 $A \cup B = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 矛盾;



若 $a+2=6$, 则 $a=4$, $2a+1=9$, 此时与 $A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 矛盾.

综上所述, $A \cap B = \{4, 5\}$. 故选 C.

1.1~1.3 节测上分

1. B 【解析】当 $y=2$ 时, x 分别取 $2, 4, 8, \frac{x}{y}$ 分别为 $1, 2, 4$;

当 $y=4$ 时, x 分别取 $2, 4, 8, \frac{x}{y}$ 分别为 $\frac{1}{2}, 1, 2$;

当 $y=8$ 时, x 分别取 $2, 4, 8, \frac{x}{y}$ 分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

故 $B = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4 \right\}$, 所有元素的和为 $\frac{31}{4}$. 故选 B.

2. B 【解析】因为集合 P 有 7 个真子集, 所以集合 P 中包含 3 个元素, 所以 $-1 \leq m-1 < 0$, 解得 $0 \leq m < 1$. 故选 B.

3. A 【解析】由题图可知阴影部分表示的集合为 $(\complement_U A) \cap B$, 而 $\complement_U A = \{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 6\}$, 故 $(\complement_U A) \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$, 故选 A.

4. C 【解析】因为 $B = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 由 $A = \{x \mid x < a\}$, $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$, 可得 $a \geq 2$. 故选 C.

5. CD 【解析】令 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, 满足 $(\complement_U A) \cup B = B$, 但 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq B$, \therefore A, B 均不正确;

由 $(\complement_U A) \cup B = B$, 知 $\complement_U A \subseteq B$, $\therefore U = (A \cup (\complement_U A)) \subseteq (A \cup B)$, $\therefore A \cup B = U$, 故 C 正确;

由 $\complement_U A \subseteq B$, 知 $\complement_U B \subseteq A$, $\therefore (\complement_U B) \cup A = A$, 故 D 正确. 故选 CD.

6. AC 【解析】由题意可得, $A = \{3, 5\}$, $B \subseteq A$.

当 $B = \emptyset$ 时, $a = 0$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, $a \neq 0$, 则 $B = \left\{ \frac{1}{a} \right\}$, 所以 $\frac{1}{a} = 3$ 或 $\frac{1}{a} = 5$, 解得 $a = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$.

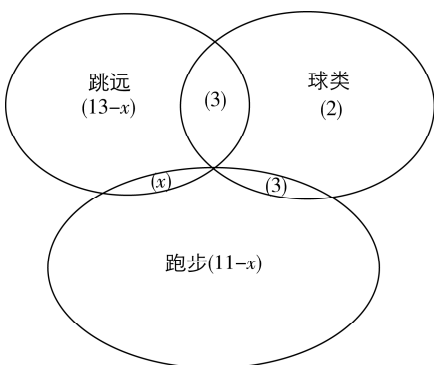
所以实数 a 的取值集合 $C = \left\{ 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right\}$,

则 $\left\{ \frac{1}{3} \right\} \subseteq C$, 故 A 正确, B 错误;

集合 C 的子集有 $2^3 = 8$ (个), 非空子集有 $2^3 - 1 = 7$ (个), 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.

7. ACD 【解析】设同时参加跳远和跑步比赛的有 x 人, 由题意画出 Venn 图, 如图所示,



则 $13-x+3+2+x+3+11-x=28$, 解得 $x=4$,
故 A 正确;

仅参加跳远比赛的人数为 $13-4=9$, 故 B 错误;

仅参加跑步比赛的人数为 $11-4=7$, 故 C 正确;

同时参加两项比赛的人数为 $3+3+4=10$,
故 D 正确.

故选 ACD.

8. D 【解析】由 $(x^2+ax)(x^2+ax+2)=0$ 可得
 $x^2+ax=0$ 或 $x^2+ax+2=0$,

因为 $A=\{1,2\}$, $A\otimes B=1$,

所以集合 B 中的元素个数为 1 或 3.

当集合 B 中的元素个数为 1 时, $x^2+ax=0$
有两个相等的实数根, 且 $x^2+ax+2=0$ 无实

根, 所以 $\begin{cases} a^2=0, \\ a^2-8<0, \end{cases}$ 解得 $a=0$;

当集合 B 中的元素个数为 3 时, $x^2+ax=0$
有两个不相等的实数根, 且 $x^2+ax+2=0$ 有
两个相等的实数根, 且异于方程 $x^2+ax=0$

的根, 所以 $\begin{cases} a\neq 0, \\ \Delta=a^2-8=0, \end{cases}$ 解得 $a=2\sqrt{2}$ 或
 $a=-2\sqrt{2}$.

综上所述, $a=0$ 或 $a=2\sqrt{2}$ 或 $a=-2\sqrt{2}$. 故
选 D.

9. D 【解析】①: 如果 $a_1 \in M, a_2 \in M$, 不妨
设 $a_1=x_1^2-y_1^2, a_2=x_2^2-y_2^2$, 那么 $a_1a_2=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)=(x_1x_2+y_1y_2)^2-(x_1y_2+x_2y_1)^2 \in M$, ①正确;

②: $B=\{b|b=2n+1, n \in \mathbf{N}\}$, 由 $b=2n+1=(n+1)^2-n^2, n+1 \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$, 得 $B \subseteq M$, ②
正确;

③: 因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, 所以当 $x+y, x-y$ 至少有一个为 0 时, $x^2-y^2=0$,

当 $x+y, x-y$ 均为非零整数时, 若 x, y 均为
奇数, 则 $x+y, x-y$ 均为偶数, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 为 4 的倍数,

若 x, y 一个为奇数, 一个为偶数, 则 $x+y, x-y$ 均为奇数, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 为奇数, 若 x, y 均为偶数, 则 $x+y, x-y$ 均为偶数, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 为 4 的倍数,

又 $2n+1=(n+1)^2-n^2, 4m=(m+1)^2-(m-$



$$1)^2, n, m \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } M = \{a \mid a = x^2 - y^2, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\} = \{d \mid d = 2n+1, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{d \mid d = 4n, n \in \mathbf{Z}\},$$

$$\text{所以 } C \cap M = \{x \mid x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}, \text{③正确.}$$

故选 D.

10.



思路导引

(1) 由 $0 \notin M, 0 \in N$, 代入求得 $q=0$, 进而确定集合 N , 从而得 $-1 \in M$, 代入求得 $p=-1$, 经验证, 即可得解.

(2) 由题设 $M = \{-2, 1\}$, 根据集合间的包含关系有 $N = \emptyset$ 或 $N = \{-2\}$ 或 $N = \{1\}$ 或 $N = \{-2, 1\}$, 进而依次求出对应参数的值或范围, 即可得解.

【解】(1) 由题设, 显然 $0 \notin M$, 而 $M \cup N = \{-1, 0, 2\}$,

所以 $0 \in N$, 则 $q=0$, 故 $N = \{x \mid x^2 - 2x = 0\} = \{0, 2\}$.

所以 $-1 \in M$, 则 $(-1)^2 + p \cdot (-1) - 2 = 0$, 解得 $p = -1$, 则 $M = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$.

综上, $M \cup N = \{-1, 0, 2\}$, 符合题意, 故 $p = -1, q = 0$.

(2) 当 $p = 1$ 时, $M = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\} = \{-2, 1\}$,

由 $N \subseteq M$, 得 $N = \emptyset$ 或 $N = \{-2\}$ 或 $N = \{1\}$ 或 $N = \{-2, 1\}$.

当 $N = \emptyset$ 时, $\Delta = 4 - 4q < 0$, 解得 $q > 1$;

当 $N = \{-2\}$ 时, $\begin{cases} -2 + (-2) = 2, \\ -2 \times (-2) = q, \end{cases}$ 无解;

当 $N = \{1\}$ 时, $\begin{cases} 1 + 1 = 2, \\ 1 \times 1 = q, \end{cases}$ 解得 $q = 1$, 此时

$N = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{1\}$, 符合题意;

当 $N = \{-2, 1\}$ 时, $\begin{cases} -2 + 1 = 2, \\ -2 \times 1 = q, \end{cases}$ 无解.

所以实数 q 的取值范围是 $\{q \mid q \geq 1\}$.

专题上分 1

集合中的参数

与新定义问题

1. D



思路导引

根据题意, 求得 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B)$, 利用 $C \cap \complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) = \emptyset$, 列出不等式组, 求得 m 的取值范围, 结合选项, 即可求解.

【解析】由集合 $A = \{x \mid -1 < x < 4\}$, $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$,

可得 $A \cup B = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 4\}$,

因为 $C \cap \complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) = \emptyset$,

所以 $\begin{cases} m \geq -1, \\ m+2 < 4, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq m < 2$,



结合选项,可得选项 D 不满足题意.

故选 D.

2.



思路导引

(1) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, 求出

集合 B , 利用补集和交集的定义可求得集合 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$;

(2) 根据所选条件可得出 $A \subseteq B$, 分 $a < 0, a > 0$ 两种情况讨论, 求出集合 B , 根据集合的包含关系可得出关于实数 a 的不等式, 即可解得实数 a 的取值范围.

【解】(1) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $B = \left\{ x \mid \frac{1}{3}x - 1 \geq 0 \right\} = \{ x \mid x \geq 3 \}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{ x \mid x < 3 \}$,

故 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{ x \mid 1 \leq x < 3 \}$.

(2) 若选①, $A \cup B = B$, 可得 $A \subseteq B$, 则 $B \neq \emptyset$, 即 $a \neq 0$.

当 $a < 0$ 时, $B = \left\{ x \mid x \leq \frac{1}{a} \right\}$, 由 $\{ x \mid 1 \leq x \leq 5 \} \subseteq \left\{ x \mid x \leq \frac{1}{a} \right\}$, 可得 $\frac{1}{a} \geq 5$, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $B = \left\{ x \mid x \geq \frac{1}{a} \right\}$, 由 $\{ x \mid 1 \leq x \leq 5 \} \subseteq \left\{ x \mid x \geq \frac{1}{a} \right\}$, 可得 $\frac{1}{a} \leq 1$, 故 $a \geq 1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{ a \mid a \geq 1 \}$.

若选②, $B \cup (\complement_{\mathbf{R}} A) = \mathbf{R}$, 可得 $A \subseteq B$, 则 $B \neq \emptyset$.

下同选①的步骤.

若选③, $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$, 可得 $A \subseteq B$, 则 $B \neq \emptyset$.

下同选①的步骤.

3. A 【解析】集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{ x \mid ax^2 = 2, a \geq 0 \}$.

若 $a = 0$, 则 $B = \emptyset$, 即有 $B \subseteq A$;

若 $a > 0$, 则 $B = \left\{ -\sqrt{\frac{2}{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}} \right\}$, 不满足 $B \subseteq A$;

若 A, B 两个集合有公共元素且互不为对方的子集, 则 $\sqrt{\frac{2}{a}} = 2$ 或 $-\sqrt{\frac{2}{a}} = -1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = 2$.

综上可得, $a = 0$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 2 . 故选 A.

4. C 【解析】对于①, 存在 $S = \{0\}$, 满足有限集, 也满足“和谐集”, 故①正确;

对于②, 当 $S = \{ x \mid x = k\sqrt{3}, k \in \mathbf{Z} \}$ 时,

对于 $a = \sqrt{3}k_1, k_1 \in \mathbf{Z}, b = \sqrt{3}k_2, k_2 \in \mathbf{Z}$,

总有 $a + b = \sqrt{3}(k_1 + k_2), k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}, a - b = \sqrt{3}$



$$(k_1 - k_2), k_1 - k_2 \in \mathbf{Z},$$

所以 $a+b \in S$ 且 $a-b \in S$, 即满足“和谐集”, 故②正确;

对于③, 由“和谐集”的定义, 可知当 $a=b$ 时, $a-b=0$, 则“和谐集”中必有元素 0, 所以若 S_1, S_2 都是“和谐集”, 则 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, 故③正确;

对于④, 存在“和谐集” $S_1 = \{x | x = k\sqrt{3}, k \in \mathbf{Z}\}$, $S_2 = \{0\}$, 此时 $S_1 \cup S_2 \neq \mathbf{R}$, 故④错误.
故选 C.

5. 【解】(1) 因为对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 有 $a \oplus b = ab$, $a \otimes b = a^b + 1$,

全集 $U = \{x | x = a \oplus b + a \otimes b, 0 < a \leq b < 3 \text{ 且 } a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$,

所以 $U = \{x | x = ab + a^b + 1, 0 < a \leq b < 3, a, b \in \mathbf{Z}\}$.

因为 $0 < a \leq b < 3, a, b \in \mathbf{Z}$, 所以 $a=1, b=1$, 或 $a=1, b=2$, 或 $a=2, b=2$.

当 $a=1, b=1$ 时, $ab + a^b + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$;

当 $a=1, b=2$ 时, $ab + a^b + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$;

当 $a=2, b=2$ 时, $ab + a^b + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$.

所以 $U = \{3, 4, 9\}$.

$$(2) 4(a \oplus b) + \frac{a \otimes b}{b} = 4ab + \frac{a^b + 1}{b},$$

因为 $0 < a < b < 3$ 且 $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$, 所以 $a=1, b=2$,

$$\text{所以 } 4(a \oplus b) + \frac{a \otimes b}{b} = 4ab + \frac{a^b + 1}{b} = 4 \times 1 \times 2 + \frac{1^2 + 1}{2} = 9, \text{ 所以 } A = \{9\}.$$

(3) 因为 $U = \{3, 4, 9\}, A = \{9\}$, 所以 $\complement_U A = \{3, 4\}$.

假设集合 A, B 能满足 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 则 $B \subseteq A$,

所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{9\}$.

又 $B = \{x | x^2 - 3x + m = 0\}$,

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-3)^2 - 4m < 0$, 解得 $m > \frac{9}{4}$;

当 $B = \{9\}$ 时, $m = 3 \times 9 - 9^2 = -54$, 此时 $B = \{x | x^2 - 3x - 54 = 0\} = \{-6, 9\}$, 矛盾, 舍去.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\left\{m \mid m > \frac{9}{4}\right\}$.

所以集合 A, B 能满足 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 实数 m 的取值范围为 $\left\{m \mid m > \frac{9}{4}\right\}$.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件+

1.4.2 充要条件



基础上分



1. **D** 【解析】对于 A, 当 $c=0$ 时, 满足 $ac=bc$, 此时 $a \neq b$, 故 A 错误;

对于 B, $x^2 \geq 1$, 等价于 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 故 $x \geq 1$ 是 $x^2 \geq 1$ 的充分不必要条件, 故 B 错误;

对于 C, “四边形对角线互相垂直”是“四边形为菱形”的必要不充分条件, 故 C 错误;

对于 D, “ $1 < x < 3$ ”是“ $x \geq 0$ ”的充分不必要条件, 故 D 正确;

故选 D.

2. **B** 【解析】由题意可知, “做容易事”不能推出“做难为之事”, 但“做难为之事”一定可以推出“做容易事”, 故“做容易事”是“做难为之事”的必要不充分条件, 故选 B.

3. **B** 【解析】若 $M \subseteq N$, 则 $a^2 = 1$ 或 $a^2 = 2$, 可得 $a = \pm 1$ 或 $a = \pm \sqrt{2}$,

故由 $M \subseteq N$ 不一定推出 $a = 1$, 反之, 若 $a = 1$, 则 $M = \{-1, 1\}$, 满足 $M \subseteq N$,

故“ $M \subseteq N$ ”是“ $a = 1$ ”的必要不充分条件.

故选 B.

4. **A** 【解析】 $\because \alpha$ 是 β 的必要不充分条件, $\therefore \beta \Rightarrow \alpha$, α 无法推出 β .

又 $\because \gamma$ 是 β 的充要条件, $\therefore \gamma \Leftrightarrow \beta$, $\therefore \gamma \Rightarrow \alpha$, α 无法推出 γ .

由充分条件和必要条件的定义可知, γ 是 α 的充分不必要条件. 故选 A.

5. **C** 【解析】充分性: $4m+6n=2(2m+3n)$, 当 $n=0, m \in \mathbf{Z}$ 时, $2m+3n=2m$ 为偶数;

当 $m=1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2m+3n=2+3n$; 当 $m=0, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2m+3n=3n$;

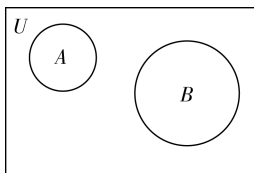
当 $m=-1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2m+3n=3n-2$, 则 $2m+3n$ 可表示所有整数, 即 $4m+6n$ 可表示所有偶数.

因为 $2k \in A$, 则 $2k \in B$, 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件.

必要性: 因为 $4m+6n=2(2m+3n)$, $m, n \in \mathbf{Z}$, 所以“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件,

即“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件. 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充要条件. 故选 C.

6. **A** 【解析】由 $A \subseteq \complement_U B$, 得 A, B 关系如图, 由图可知 $B \subseteq \complement_U A$ 正确. 故选 A.



7. **C** 【解析】 $\because |x| \leq 1$, $\therefore -1 \leq x \leq 1$,

A 选项是充要条件, A 错误;

B 选项是充分不必要条件, B 错误;



C 选项是必要不充分条件, C 正确;

D 选项是充分不必要条件, D 错误.

8. 【证明】①充分性: 即证明 $a-b+c=0 \Rightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 -1 ,

由 $a-b+c=0$, 得 $b=a+c$,

代入方程得 $ax^2+(a+c)x+c=0$, 得 $(ax+c)(x+1)=0$,

所以 $x=-1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

②必要性: 即证明 $x=-1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 $\Rightarrow a-b+c=0$,

将 $x=-1$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$, 即有 $a-b+c=0$.

由①②可知, 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 -1 的充要条件是 $a-b+c=0$.



对点上分

1. B 【解析】选项 A, 菱形的对角线互相垂直平分, 但是当菱形的邻角不相等时, 此时四边形不是正方形, 所以 p 不是 q 的充要条件, 因此本选项不符合题意;

选项 B, 当两个三角形相似时, 这两个三角形三边对应成比例, 当两个三角形三边对应成比例时, 这两个三角形相似, 所以 p 是 q 的充要条件, 因此本选项符合题意;

选项 C, 当 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ 时, 显然 $A \cap B$ 为空集, 但是 A 与 B 都不为空集, 所以 p 不是 q 的充要条件, 因此本选项不符合题意;

选项 D, 因为等边三角形是特殊的等腰三角形, 所以 p 不是 q 的充要条件, 因此本选项不符合题意. 故选 B.

2. BC 【解析】因为方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 至多有一个实数根,

所以方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 的根的判别式 $\Delta \leq 0$,

即 $(m-1)^2-4 \leq 0$, 解得 $-1 \leq m \leq 3$,

利用必要条件的定义, 结合选项可知, $-1 \leq m \leq 3$ 成立的必要条件可以是选项 B 和选项 C.

故选 BC.

3. AD 【解析】对于 A, 灯泡 L 亮, 可能是 S_1 闭合, 不一定是 S 闭合, 当 S 闭合时, 必有灯泡 L 亮, 故 p 是 q 的必要不充分条件, A 正确;

对于 B, 由于 S 和 L 是串联关系, 故灯泡 L 亮, 必有 S 闭合, S 闭合, 灯泡 L 亮, 即 p 是 q 的充要条件, B 错误;

对于 C, 灯泡 L 亮, 则开关 S_1 和 S 必都闭合, 当开关 S 闭合 S_1 打开时, 灯泡 L 不亮, 故 p 是 q 的充分不必要条件, C 错误;

对于 D, 灯泡 L 亮, 开关 S 未必闭合, 当开



关 S 闭合时,灯泡 L 亮,故 p 是 q 的必要不充分条件, **D 正确**.

故选 AD.

- 4. C** 【解析】因为此数字为小于 5 的正整数,所以 $A = \{x \mid 0 < \Delta x < 2\} = \left\{x \mid 0 < x < \frac{2}{\Delta}\right\}$,

因为 B 是 A 成立的必要不充分条件, C 是 A 成立的充分不必要条件,所以 C 是 A 的真子集, A 是 B 的真子集,故 $\frac{2}{\Delta} > \frac{2}{3}$ 且 $\frac{2}{\Delta} \leq 5$, 解得 $\frac{2}{5} \leq \Delta < 3$, 故“ Δ ”中的数字可以是 1 或 2. **故选 C.**

- 5. (1)④ (2)①** 【解析】由题意知, ① $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $b = 0$, 即 a, b 至少有一个为 0;
② $a + b = 0 \Leftrightarrow a, b$ 互为相反数, 则 a, b 可能均为 0, 也可能为一正数一负数;
③ $a(a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow a = 0, b$ 为任意实数;
④ $ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases}$

综上可得, (1) 使 a, b 都不为 0 的充分条件是④; (2) 使 a, b 至少有一个为 0 的充要条件是①.

- 6. (1) $\frac{1}{2}$ (2)①②⑤** 【解析】(1) 若 A 是 B 的充要条件, 则 $A = B$.

当 $b = 0$ 时, $B = \emptyset$, 不符合题意, 故 $b \neq 0$;

当 $b > 0$ 时, $B = \left\{x \mid x > \frac{1}{b}\right\}$, 此时若 $A = B$,

则 $\frac{1}{b} = 2$, 解得 $b = \frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $b < 0$ 时, $B = \left\{x \mid x < \frac{1}{b}\right\}$, 此时 $A \neq B$, 不符合题意. 综上, $b = \frac{1}{2}$.

(2) 若 A 是 B 的充分不必要条件, 则 A 是 B 的真子集,

故由 (1) 得, 当 $b \leq 0$ 时, 不符合题意, 当 $b >$

0 时, $B = \left\{x \mid x > \frac{1}{b}\right\}$, 此时 A 是 B 的真子

集, 得到 $\frac{1}{b} < 2$, 解得 $b > \frac{1}{2}$, 故满足条件的是①②⑤.

- 7. (思路导引)** (1) 利用集合间的包含关系得到两个不等式: 左端点满足 $1 - m \leq -2$, 右端点满足 $1 + m \geq 10$, 再结合集合非空条件 $m \geq 0$, 联立解得 m 的取值范围.

(2) 由 $S \subsetneq P$ 得两个不等式: $1 - m \geq -2$ 且 $1 + m \leq 10$, 结合 $m \geq 0$ 解得 $0 \leq m \leq 3$.

【解】(1) 由题意, $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充分条



件,所以 $P \subseteq S$,

即 $-2 \geq 1-m$ 且 $10 \leq 1+m$, 且 $m \geq 0$,

解得 $m \geq 9$,

故实数 m 的取值范围为 $\{m | m \geq 9\}$.

(2) 若 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要不充分条件, 则 $S \subsetneq P$,

所以 $\begin{cases} 1-m \geq -2 \text{ ①,} \\ 1+m \leq 10 \text{ ②,} \end{cases}$ ①②等号不同时成立,

结合 $m \geq 0$, 解得 $0 \leq m \leq 3$,

因此存在实数 m , 其取值范围为 $\{m | 0 \leq m \leq 3\}$.

1.4 节测上分

1. B 【解析】因为 $xy+1 \neq x+y$, 即 $xy+1-x-y \neq 0$, 所以 $(x-1)(y-1) \neq 0$, 即 $x \neq 1$ 且 $y \neq 1$, 故“ $xy+1 \neq x+y$ ”的充要条件是“ x, y 都不为 1”, 故选 B.

2. B 【解析】不等式 $[x]^2 - [x] - 2 \leq 0 \Leftrightarrow ([x]-2)([x]+1) \leq 0$, 则 $-1 \leq [x] \leq 2$, 解得 $-1 \leq x < 3$,

集合 $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$ 真包含于集合 $\{x | -1 \leq x < 3\}$,

所以“ $-1 \leq x \leq 2$ ”是“ $[x]^2 - [x] - 2 \leq 0$ ”的充分不必要条件.

故选 B.

3. AC 【解析】对于 A, 若 $x > \sqrt{2}$, 则 $x > 1$, 故充分性成立;

若 $x > 1$, 取 $x = 1.2$, 则 $x < \sqrt{2}$, 故必要性不成立,

所以“ $x > \sqrt{2}$ ”是“ $x > 1$ ”的充分不必要条件, 故 A 正确.

对于 B, 当 $m \neq 0, n = 0$ 时, $mn = 0$, 故充分性不成立;

若 $mn \neq 0$, 则 $m \neq 0$, 故必要性成立,

所以“ $m \neq 0$ ”是“ $mn \neq 0$ ”的必要不充分条件, 故 B 错误.

对于 C, 若 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$,

等式变形为 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$,

所以 $a = b = c$, 故充分性成立;

若 $a = b = c$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, 故必要性成立,

所以“ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ”是“ $a = b = c$ ”的充要条件, 故 C 正确.

对于 D, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 例如 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$, 此时 $A \subseteq B$ 不成立, 故充分性不成立;

若 $A \subseteq B$, 则当 $A = \emptyset$ 时, $A \cap B = \emptyset$, 故必要性不成立,

所以“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的既不充分也不必要条件, 故 D 错误.

故选 AC.

4. D 【解析】对于 A, 若 $x = -4$, 则 $x < 3$, 但



$x^2 < 9$ 不成立, 所以“ $x < 3$ ”不是“ $x^2 < 9$ ”的充分条件, 故 A 错误;

对于 B, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} (x-1)(y-2) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ 或 } y=2$, 所以“ $(x-1) \cdot (y-2) = 0$ ”与“ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ ”不等价, 故 B 错误;

对于 C, 由 $|x| > |y|$, 取 $x = -2, y = 1$, 则 $x < y$, 由 $x > y$, 取 $x = 1, y = -2$, 则 $|x| < |y|$, 所以“ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的既不充分也不必要条件, 故 C 错误;

对于 D, 由 $a - 2b = 0$, 得 $a = b = 0$ 或 $\frac{a}{b} = 2$, 而由 $\frac{a}{b} = 2$, 得 $a - 2b = 0$, 所以“ $a - 2b = 0$ ”是“ $\frac{a}{b} = 2$ ”的必要不充分条件, 故 D 正确. 故选 D.

5. D 【解析】取 $x_1 = -\frac{1}{2} > -1, x_2 = 4 > 1$, 则

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{2} > 0, x_1 x_2 = -2 < -1,$$

所以由 $x_1 > -1$ 且 $x_2 > 1$ 不能推出 $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 > -1$,

取 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$, 满足 $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 0$ 且

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2} > -1, \text{ 但 } x_2 < 1,$$

所以由 $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 > -1$ 不能推出 $x_1 > -1$ 且 $x_2 > 1$,

所以“ $x_1 > -1$ 且 $x_2 > 1$ ”是“ $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 > -1$ ”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

6. B 【解析】把 $x = 2$ 代入 $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$, 得 $4m^2 - 2m - 2 = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 1$.

当 $m = 1$ 时, $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ 可化为 $x^2 - 4x + 4 = 0$, 解得 $x = 2$, 此时“ $x = 2$ ”是“ $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ ”的充要条件, 应舍去;

当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ 可化为 $x^2 - 10x + 16 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 8$, 此时“ $x = 2$ ”是“ $m^2 x^2 - (m+3)x + 4 = 0$ ”的充分不必要条件, 故 $m = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

7. ③ 【解析】对于①, “若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$ ”的否命题是“若 $x^2 \neq 1$, 则 $x \neq 1$ ”, 故①错误; 对于②, 解方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 6$, 所以“ $x = -1$ ”是“ $x^2 - 5x - 6 = 0$ ”的充分不必要条件, 故②错误;



对于③,由命题“若 $a+b \neq 3$, 则 $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ”的逆否命题为“若 $a=1$ 且 $b=2$, 则 $a+b=3$ ”,可知,“ $a+b \neq 3$ ”与“ $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ”的条件关系和“ $a=1$ 且 $b=2$ ”与“ $a+b=3$ ”的条件关系相同,

$a=1$ 且 $b=2 \Rightarrow a+b=3$,充分性成立,若取

$a=b=\frac{3}{2}$,则 $a+b=3$,此时 $a+b=3 \nRightarrow a=1$

且 $b=2$,必要性不成立,则“ $a=1$ 且 $b=2$ ”

是“ $a+b=3$ ”的充分不必要条件,

所以“ $a+b \neq 3$ ”是“ $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ”的充分不必要条件,故③正确.

8. 【解】(1)①当 $2m \geq 1-m$, 即 $m \geq \frac{1}{3}$ 时, $B = \emptyset$, 符合题意;

②当 $2m < 1-m$, 即 $m < \frac{1}{3}$ 时, 此时 $B \neq \emptyset$, 要满足 $A \cap B = \emptyset$,

则需 $\begin{cases} m < \frac{1}{3}, \\ 1-m \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m < \frac{1}{3}, \\ 2m \geq 4, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq m < \frac{1}{3}$.

综上,实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m \geq -1\}$.

(2) $\because q$ 是 p 的必要不充分条件,

$\therefore A \subsetneq B$,

则 $\begin{cases} 1-m > 2m, \\ 2m \leq 2, \\ 1-m > 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-m > 2m, \\ 2m < 2, \\ 1-m \geq 4, \end{cases}$ 解得 $m \leq -3$,

故实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m \leq -3\}$.

1.5 全称量词与存在量词

1.5.1 全称量词与存在量词+

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定



基础上分

1. C 【解析】对于 A,命题含有存在量词,此命题为存在量词命题,不符合题意;

对于 B,命题含有存在量词,此命题为存在量词命题,不符合题意;

对于 C,命题为所有偶数的平方是偶数,此命题为全称量词命题,符合题意;

对于 D,命题含有存在量词,此命题为存在量词命题,不符合题意. 故选 C.

2. 2 【解析】①是全称量词命题;

④是全称量词命题;

②和③含有存在量词,是存在量词命题.

3. $\forall k \in \mathbf{N}^*, 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ (答案不唯一) 【解析】观察式子可知,从 1 开始从小到大连续 k 个奇数相加的和为 k^2 ,故可得 $\forall k \in \mathbf{N}^*, 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$.

4. B 【解析】对于命题 p ,存在 $x=1, x^2-x+$



$3=x+2$, 所以命题 p 是真命题;

→要判定存在量词命题“ $\exists x \in M, p(x)$ ”是真命题, 只需在集合 M 中找到一个元素 x_0 , 使 $p(x_0)$ 成立即可; 如果在集合 M 中, 使 $p(x)$ 成立的元素 x 不存在, 那么这个存在量词命题是假命题
对于命题 q , 当 $x=0$ 时, $x^2=0$, 所以命题 q 是假命题.

→要判定全称量词命题“ $\forall x \in M, p(x)$ ”是真命题, 需要对集合 M 中每个元素 x , 证明 $p(x)$ 成立; 如果在集合 M 中找到一个元素 x_0 , 使 $p(x_0)$ 不成立, 那么这个全称量词命题就是假命题

故选 B.

5. AC 【解析】对于 A, 是全称量词命题且为真命题, 故正确;

对于 B, 是真命题, 但有存在量词, 不是全称量词命题, 故错误;

对于 C, 是全称量词命题, 根据菱形的性质可得四条边都相等, 也是真命题, 故正确;

对于 D, 是假命题, 故错误.

6. B 【解析】对于 A, 当 $x=0$ 时, $x^2+x>0$ 显然不成立, 故 A 错误;

对于 B, $|x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, 所以 $x \neq 1$ 是 $|x| \neq 1$ 的必要不充分条件, 故 B 正确;

对于 C, $\frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$, 但 $\frac{1}{4} \notin \mathbf{Z}$, 故充分性不成立, 故 C 错误;

对于 D, 由 $x>3$ 能得到 $x>2$, 而由 $x>2$ 不一定能得到 $x>3$, 如 $x=2.5$, 故 $x>3$ 是 $x>2$ 的充分不必要条件, 故 D 错误.

故选 B.

7. 【解】(1) 因为“有些”是存在量词, 所以“有些奇数是合数”是存在量词命题.

9 是奇数也是合数, 所以该命题是真命题.

(2) 该命题是全称量词命题, 因为无限不循环小数是无理数, 无理数集包含于实数集, 所以该命题是真命题.

(3) 因为“至少有一个”是存在量词, 所以“至少有一个数能被 3 和 5 整除”是存在量词命题.

15 能被 3 和 5 整除, 所以该命题是真命题.

(4) 因为“所有”是全称量词, 所以“所有反比例函数的图象都是中心对称图形”是全称量词命题.

反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 其图象关于坐标原点对称, 故该命题是真命题.

8. C 【解析】命题“所有的素数都不能被 2 整除”的否定为“存在一个素数能被 2 整除”. 故选 C.



9. C 【解析】由 $x > 1$, 可得 $\frac{2}{x} < 2$, 所以 p 是假命题,

且 $\neg p$ 为 $\forall x > 1, \frac{2}{x} \leq 2$.

故选 C.

10. B 【解析】当 $x = 1$ 时, $x^2 > x$ 显然不成立, 所以 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题; 当 $x = y = -1$ 时, $x + y < 2\sqrt{xy}$ 显然成立, 所以 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题. 故选 B.

11. AD



思路导引 方法一: 根据全称量词命题的否定是存在量词命题判断 B; 根据存在量词命题的否定是全称量词命题, 再根据原命题的否定是否为真命题判断 ACD.

方法二: 存在量词命题与全称量词命题一真一假, 只需找选项中是存在量词命题, 且为假命题的即可.

【解析】方法一: 对于 A, $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$ 是存在量词命题,

其否定为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$, 即 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, 是全称量词命题, 且为真命题.

对于 B, 所有的正方形都是矩形是全称量词命题, 其否定为存在量词命题.

对于 C, $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$ 是存在量词命题,

其否定为 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$, 当 $x = 1$ 时, $x^2 + 2x + 2 > 0$, 故其为假命题.

对于 D, 至少有一个实数 x , 使 $x^2 + 1 = 0$ 是存在量词命题,

其否定为对任意实数 x , 都有 $x^2 + 1 \neq 0$, 因为 $x^2 \geq 0$, 所以不存在 x 使得 $x^2 + 1 = 0$, 故其为真命题.

方法二: 只有 ACD 是存在量词命题, 且 A

中 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, 所以 A 为假命题,

C 中 $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ 恒成立, 所以 C 为真命题,

D 中对任意实数 x , 都有 $x^2 + 1 \neq 0$, 所以 D 为假命题.

故选 AD.

12. $\exists x > -3, \frac{3}{2x-4} \geq 0$ 或 $2x-4=0$

【解析】 $\because \frac{3}{2x-4} < 0$ 中隐含了 $2x-4 \neq 0$, 如

果只将结论否定为 $\frac{3}{2x-4} \geq 0$, 那么缺少



“ $2x-4=0$ ”的情况, \therefore “ $\forall x > -3, \frac{3}{2x-4} < 0$ ”

的否定是“ $\exists x > -3, \frac{3}{2x-4} \geq 0$ 或 $2x-4=0$ ”.

易错警示 忽视否定的范围致错

本题容易出现的错误答案是

“ $\exists x > -3, \frac{3}{2x-4} \geq 0$ ”, 这里否定不全面.



对点上分

1. A 【解析】由命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2+m=0$ ”是假命题,

得命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+m \neq 0$ ”是真命题, 即 $\Delta = -4m < 0$, 所以 $m > 0$. 故选 A.

2. B 【解析】已知“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2ax^2+ax-\frac{3}{8}=0$ 无实数根”为真命题.

当 $a=0$ 时, $-\frac{3}{8} \neq 0$, 满足要求;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = a^2+3a < 0$, 解得 $-3 < a < 0$, 所以实数 a 的取值范围是 $\{a \mid -3 < a \leq 0\}$.

故选 B.

3. ABD 【解析】命题 p 的否定为命题 q : $\exists x \in \mathbf{R}, 3x^2+2x+a=0$, 由题知命题 q 是真命题, 令 $\Delta = 2^2-4 \times 3a \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{1}{3}$, 故

当命题 q 为真命题时, $a \in \left\{a \mid a \leq \frac{1}{3}\right\}$.

根据题意, 结合充分条件的定义, 知所求 a 的范围是集合 $\left\{a \mid a \leq \frac{1}{3}\right\}$ 的子集. 故选 ABD.

4. 【解】(1) 若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的负实根 x_1, x_2 ,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0, \\ x_1 + x_2 = -m < 0, \text{解得 } m > 2. \\ x_1 x_2 = 1 > 0, \end{cases}$$

因为命题 $\neg p$ 为真, 则命题 p 为假, 所以实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m \leq 2\}$.

(2) 若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根, 则 $\Delta = 16(m-2)^2-16 < 0$, 解得 $1 < m < 3$.

若 p 真 q 假, 则 $\begin{cases} m > 2, \\ m \leq 1 \text{ 或 } m \geq 3, \end{cases}$

解得 $m \geq 3$;

若 p 假 q 真, 则 $\begin{cases} m \leq 2, \\ 1 < m < 3, \end{cases}$

解得 $1 < m \leq 2$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $\{m \mid 1 < m \leq 2 \text{ 或 } m \geq 3\}$.



1.5 节测上分

1. **B** 【解析】ACD 选项中的命题均为全称量词命题, B 选项中的命题是存在量词命题. 故 B 正确.

2. **B** 【解析】若两个三角形的面积相等, 由三角形的面积公式可得这两个三角形底与高的乘积相等, 所以两个三角形不一定全等, 故 A 错误;

由矩形的定义可知, 若平行四边形的对角线相等, 则这个四边形是矩形, 故 B 正确;

对于任意实数 x , $|x| \geq 0$, 故 C 错误;

所有可以被 5 整除的整数, 末尾数字都是 0 或 5, 故 D 错误.

3. **D** 【解析】由题意可知命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n \geq 2x+1$ ” 的否定为 “ $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$ 使得 $n < 2x+1$ ”. 故选 D.

4. **D** 【解析】因为命题 “ $\forall 1 \leq x \leq 2, 2x^2 - a \geq 0$ ” 为真命题,

所以当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $a \leq 2x^2$ 恒成立, 所以 $a \leq (2x^2)_{\min} = 2$.

“ $a \leq 1$ ” 是 “ $a \leq 2$ ” 的充分不必要条件;

“ $a = 1$ ” 是 “ $a \leq 2$ ” 的充分不必要条件;

“ $a \leq 2$ ” 是 “ $a \leq 2$ ” 的充要条件;

“ $a \leq 4$ ” 是 “ $a \leq 2$ ” 的必要不充分条件.

故选 D.

5. **AD** 【解析】根据全称量词命题的否定是存在量词命题, 可知 A 正确;

由题意可知, 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - a \neq 0$ ” 为真命题, 即 $\Delta = (-2)^2 + 4a < 0$, 即 $a < -1$, 故 B 错误;

取 $a = 1, b = -2$, 满足 $a > b$, 但 $a^2 < b^2$, 故 $a > b$ 不能推出 $a^2 > b^2$, 反过来, 取 $a = -2, b = 1$, 满足 $a^2 > b^2$, 但 $a < b$, 故 $a^2 > b^2$ 也不能推出 $a > b$, 所以 “ $a > b$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的既不充分也不必要条件, 故 C 错误;

$x = \sqrt[4]{2}$ 是无理数, $x^2 = \sqrt{2}$ 也是无理数, 故 D 正确. 故选 AD.

6. $\{m \mid m \leq -2 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$ 【解析】若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + m = 0$ 为真命题, 则 $\Delta = 4 - 4m \geq 0$, 解得 $m \leq 1$.

若命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - mx + 1 \neq 0$ 为真命题, 则 $\Delta' = m^2 - 4 < 0$, 解得 $-2 < m < 2$.

因为命题 p, q 一真一假, 所以 p 真 q 假, 或 p 假 q 真.

当 p 真 q 假时, $\begin{cases} m \leq 1, \\ m \leq -2 \text{ 或 } m \geq 2, \end{cases}$ 解得 $m \leq -2$;

当 p 假 q 真时, $\begin{cases} m > 1, \\ -2 < m < 2, \end{cases}$ 解得 $1 < m < 2$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m \leq -2 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$.



7. 【解】(1) 命题的否定是“存在实数 m , 方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根”, 是真命题.

当 $\Delta=1+4m<0$, 即 $m<-\frac{1}{4}$ 时, 一元二次方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根.

(2) 命题的否定是“任何一个梯形的对角线都不互相平分”, 是真命题.

假设四边形的对角线互相平分, 则该四边形就是平行四边形, 不是梯形.

(3) 命题的否定是“存在一个数能被 8 整除, 但不能被 4 整除”, 是假命题.

8. 【解】(1) 命题 $p: \forall x \geq 2, \frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{2}$ 为真命题, 即 $\forall x \geq 2, m \leq \frac{1}{2}(x-1)$,

因为 $y = \frac{1}{2}(x-1)$ 随着 x 的增大而增大, 所以

当 $x=2$ 时, $y = \frac{1}{2}(x-1) (x \geq 2)$ 取得最

小值 $\frac{1}{2}$, 所以 $m \leq \frac{1}{2}$, 即 m 的取值范围

为 $\left\{m \mid m \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(2) 若命题 $q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2-2x+2-m=0$ 为真命题, 则 $\Delta=4-4(2-m) \geq 0$, 解得 $m \geq 1$,

若命题 p 为假命题, 则 $m > \frac{1}{2}$,

因为命题 p 为假命题且命题 q 为真命题, 所以 $m \geq 1$, 即 m 的取值范围为 $\{m \mid m \geq 1\}$.

真题上分

1. C 【解析】由题知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, 有 5 个元素. 故选 C.

2. A 【解析】因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则 $2, 4, 5 \in M$, 故选 A.

3. B 【解析】由题意知 $0 \in B$. 当 $a-2=0$ 时, 即 $a=2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, $A \not\subseteq B$, 不符合题意.

当 $2a-2=0$ 时, 即 $a=1$, 此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 满足 $A \subseteq B$, 所以 $a=1$, 故选 B.

4. A 【解析】由题意可知 $-1 \in B$, $(-1)^3 = -1 \in A$, $0 \in B$, $0^3 = 0 \in A$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$. 故选 A.

一题多解

由题意知 $A = \{x \mid -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, 又 $1 = \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} = 2$, 所以在 A 中的整数元素为 $-1, 0, 1$, 又 $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$, 故选 A.

5. D 【解析】由题可得, $M = \{x \mid x > 3\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, 则 $M \cap N = \emptyset$, 故选 D.



6. D 【解析】 $\because A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}, \therefore B = \{x | \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}, \therefore A \cap B = \{1, 4, 9\}, \therefore \complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$, 故选 D.

7. D 【解析】由题意得 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 故 $\complement_U(A \cup B) = \{4\}$, 故选 D.

8. A 【解析】因为 $U = \{x | x = 3k \text{ 或 } x = 3k+1 \text{ 或 } x = 3k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, 故选 A.

9. A 【解析】因为 $M = \{x | x < 1\}, N = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x < 2\}$, $\complement_U M = \{x | x \geq 1\}, M \cap N = \{x | -1 < x < 1\}$, $\complement_U N = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $\complement_U(M \cup N) = \{x | x \geq 2\}$, $N \cup \complement_U M = \{x | x > -1\}, \complement_U(M \cap N) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}, M \cup \complement_U N = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 故选 A.

10. B 【解析】依题意可知, 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$ 或 $a = -b$.

当 $a = b$ 时, $a^2 + b^2 = 2ab$; 当 $a = -b \neq 0$ 时, $a^2 + b^2 \neq 2ab$.

若 $a^2 + b^2 = 2ab$, 即 $(a-b)^2 = 0$, 则 $a = b$, 所以 $a^2 = b^2$.

所以“ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

11. C 【解析】充分性: 当 $x+y=0$ 时, $\frac{x}{y} +$

$$\frac{y}{x} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = -2;$$

$$\text{必要性: } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy} -$$

$$2 = -2, \text{ 即 } \frac{(x+y)^2}{xy} = 0, \text{ 又 } xy \neq 0, \text{ 所以}$$

$$(x+y)^2 = 0, \text{ 即 } x+y=0,$$

$$\text{所以“} x+y=0 \text{”是“} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \text{”的充分}$$

必要条件, 故选 C.

12. B 【解析】对于命题 p , 当 $x = -1$ 时, $|x+1| = 0 < 1$, 所以 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题.

对于命题 q , 若 $x^3 = x$, 则 $x = -1, 0, 1$, 所以满足“ $\exists x > 0, x^3 = x$ ”, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题, 故选 B.



第一章 全章上分

1. C 【解析】由题知 $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $\complement_{\mathbf{R}} N = \{x | x \geq 2\}$, 故 $M \cap \complement_{\mathbf{R}} N = \{2, 3\}$. 故 C 正确.

2. D 【解析】对于①, \because “有些”为存在量词, \therefore 命题“有些平行四边形是矩形”是存在量词命题, 故①正确;

对于②, \because “ \forall ”为任意, 是全称量词, \therefore 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + 1 \geq 1$ ”是全称量词命题, 故②正确;

对于③, 当 $x = 0$ 时, $x^2 - 3x + \sqrt{2} = \sqrt{2} > 0$, \therefore “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + \sqrt{2} > 0$ ”为真命题, 故③错误;

对于④, $\because \forall x \in \mathbf{Z}, |x| \geq 0, \therefore |x| \in \mathbf{N}$, 故④正确.

3. D 【解析】“对任意正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解”的否定为“存在正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解”. 故选 D.

4. B 【解析】因为集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $M = \{x | x = a + b, a \in A, b \in B\}$, 所以 $a + b$ 的值可能为 $1 + 4 = 5, 1 + 5 = 6, 2 + 4 = 6, 2 + 5 = 7, 3 + 4 = 7, 3 + 5 = 8$, 所以 M 中的元素有 5, 6, 7, 8, 共 4 个.

故 B 正确.

5. D 【解析】因为集合 $A = \{1, 2024, a^2\}$, $B = \{2024, 2a + 3\}$, 且 $\complement_A B = \{1\}$, 所以 $a^2 = 2a + 3$, 即 $a^2 - 2a - 3 = (a - 3)(a + 1) = 0$, 则 $a = 3$ 或 $a = -1$.

当 $a = 3$ 时, 集合 $A = \{1, 2024, 9\}$, $B = \{2024, 9\}$, 符合题意;

当 $a = -1$ 时, 集合 A 不满足集合中元素的互异性, 舍去,

所以 $a = 3$.

故选 D.

6. A 【解析】由题意可知, 集合 P 中有 5 个元素,

每一个元素在所有子集中出现的次数为 $2^{5-1} = 16$,

所以 P 的所有子集中的所有元素之和为 $16 \times (1 - 2 + 3 + x + y) = 32$,

所以 $x + y = 0$.

故选 A.

7. ABD 【解析】选项 A: \because 集合中的元素具有互异性, $\therefore m \neq 0, m^2 - 3m + 2 \neq 0$, 故 A 错误.

选项 B: 集合 $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} y = -4x + 6, \\ y = 5x - 3 \end{cases} \right\}$ 表示



方程组 $\begin{cases} y = -4x + 6, \\ y = 5x - 3 \end{cases}$ 的解集, 解方程组

$$\text{得} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$$

\therefore 用列举法表示集合为 $\{(1, 2)\}$, 不是 $\{x = 1, y = 2\}$, 故 B 错误.

选项 C: $\because M \cup N = M, \therefore N \subseteq M$,

$\because M = \{0, 1\}, \therefore N$ 可能为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$, 共 4 个, 故 C 正确.

选项 D: 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 A, B 可能都不是空集, 如 $A = \{0\}, B = \{1\}, A \cap B = \emptyset$, 但 A, B 都不是空集, 故 D 错误.

故选 ABD.

8. BC 【解析】对 A, 当 $x = 0 \in \mathbf{Z}$ 时, 有 $x^2 = 0$, 故命题为假命题, A 错误;

对 B, 由命题 p 为假命题, 可知 $\Delta = 36 - 4a \geq 0$, 可得 $a \leq 9$, B 正确;

对 C, 方程的根为一正一负, 必有 $\Delta = (-2)^2 - 4m > 0$, 即 $m < 1$, 且两根之积 $m < 0$, 所以“ $m < 0$ ”是“关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正根和一负根”的充要条件, C 正确;

对 D, $A = \left\{ a \mid \frac{6}{3-a} \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{Z} \right\} = \{-3, 0, 1, 2\}$, 共有四个元素, D 错误.

故选 BC.

9. ABC 【解析】由 $x^2 - 2(t+1)x + t^2 + 2t < 0 \Leftrightarrow (x-t)[x-(t+2)] < 0$, 解得 $t < x < t+2$,

则 $N = \{x \mid t < x < t+2\}$,

当 $t = 0$ 时, $N = \{x \mid 0 < x < 2\}$,

又 $M = \{x \mid -2 < x < 1\}$, 则 $M - N = \{x \mid -2 < x \leq 0\}$, $N - M = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$, 故 A 正确, B 正确;

对于 C, 若 $N - M = \emptyset$, 则 $N \subseteq M$, 即

$$\begin{cases} t \geq -2, \\ t+2 \leq 1, \end{cases} \text{解得 } -2 \leq t \leq -1, \text{故 C 正确;}$$

对于 D, 由 $M - N = N - M$, 可得 $M = N$,

则 $\begin{cases} t = -2, \\ t+2 = 1, \end{cases}$ 无解, 因此不存在这样的 t , 使

得 $M - N = N - M$, 故 D 错误.

故选 ABC.

10. 3 【解析】由 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x = \pm 1$,

$$\therefore A = \{x \mid y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}\} = \{-1, 1\}.$$

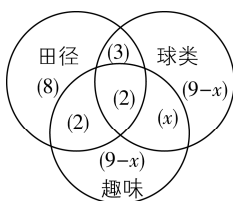
$$\because y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}, \therefore y = 0, \text{即 } B = \{y \mid$$

$$y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}\} = \{0\},$$

$\therefore A \cup B = \{-1, 0, 1\}$, 则集合 $A \cup B$ 中元素的个数为 3.

11. 6 【解析】如图所示, 设同时参加趣味比赛和球类比赛的学生有 x 人, 可得 $8+2+2+3+(9-x)+x+(9-x) = 30$, 解得 $x = 3$.

易知只参加趣味比赛一项的有 6 人.



12. $\left\{m \mid \frac{5}{3} \leq m \leq \frac{7}{3}\right\}$ 【解析】依题意，

$\neg q: 3m-3 < x < 3m+1$, 解题中不等式组可得 $p: 2 < x < 8$.

又 p 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 所以

$\begin{cases} 3m-3 \geq 2, \\ 3m+1 \leq 8, \end{cases}$ 并且两不等式的等号不同时

成立,

解得 $\frac{5}{3} \leq m \leq \frac{7}{3}$, 即实数 m 的取值范围

是 $\left\{m \mid \frac{5}{3} \leq m \leq \frac{7}{3}\right\}$.

13. 【解】(1) 命题 $\neg p$ 为假命题, 则命题 p 为真命题, 即 $a \leq x^2$ 在 $x \in \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ 时恒成立, 所以 $a \leq (x^2)_{\min} = 4$, 即实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a \leq 4\}$.

(2) 命题 $\neg q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2a \neq 0$,

$\neg q$ 为真命题, 则 $\Delta = 2^2 - 8a < 0$, 解得 $a > \frac{1}{2}$.

由(1)可知, 命题 p 为真命题时, $a \leq 4$, 所以命题 p 和 $\neg q$ 均为真命题时, 实数 a 的

取值范围是 $\left\{a \mid \frac{1}{2} < a \leq 4\right\}$.

14. 【解】(1) 当 $a=2$ 时, $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, 因为 $B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$,

所以 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \cap \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\} = \{x \mid 4 < x \leq 5\}$,

$A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \cup \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\} = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

(2) 由 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = A$, 知 $A \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} B)$, 由题可知 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$.

当 $A = \emptyset$ 时, $3-a > 3+a$, 解得 $a < 0$, 与 $a > 0$ 矛盾, 舍去;

当 $A \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ 3-a \leq 3+a, \\ 3-a \geq 0, \\ 3+a \leq 4, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq 1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid 0 < a \leq 1\}$.

15. 【解】(1) 对于集合 $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $3+3=6 \notin \{-1, 1, 2, 3\}$, $3-3=0 \notin \{-1, 1, 2, 3\}$,

所以集合 A 不具有“包容”性.

对于集合 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$,

该集合中的任何两个相同或不同的元素, 相加或相减, 得到的两数中至少有一个属于集合 $\{-1, 0, 1, 2\}$,



所以集合 B 具有“包容”性.

(2) 若集合 $M = \{1, a, b\}$ 具有“包容”性,
记 $m = \max\{1, a, b\}$,

则 $m \geq 1$, 易得 $m+m=2m \notin \{1, a, b\}$, 从而
必有 $m-m=0 \in \{1, a, b\}$,

不妨令 $a=0$, 则 $M = \{1, 0, b\}$, $b \neq 0$ 且 $b \neq 1$,

则 $\{1+b, 1-b\} \cap \{1, 0, b\} \neq \emptyset$, 且 $\{1+b, b-1\} \cap \{1, 0, b\} \neq \emptyset$,

当 $1+b \in \{1, 0, b\}$ 时, 若 $1+b=0$, 则 $b=-1$,

此时 $M = \{1, 0, -1\}$ 具有“包容”性;

若 $1+b=1$, 则 $b=0$, 舍去; 若 $1+b=b$,
无解.

当 $1+b \notin \{1, 0, b\}$ 时, $\{1-b, b-1\} \subseteq \{1, 0, b\}$,

由 $b \neq 0$ 且 $b \neq 1$, 可知 b 无解, 故 $M = \{1, 0, -1\}$,

所以 $a^2+b^2=1$.